$$dA_1 \Big|_{\sqrt{\frac{p_2'}{p_1^2}}\,\omega_1 + (-1)^i \omega_2} = \omega_1^1 A_1 + \omega_1 E_j ,$$

и $$dA_2 \Big|_{\sqrt{\frac{p_2'}{p_1^2}}\,\omega_1 + (-1)^i \omega_2} = \omega_2^2 A_2 + (-1)^j \sqrt{\frac{p_2'}{p_1^2}}\, E_j \text{ и } (A_3 A_4; E_1 E_2) = -1$$

2/Фокусами луча $A_1 A_2$ прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$ являются точки $F_i = A_1 + (-1)^i \sqrt{\frac{p_1^2}{p_2'}}\, A_2$.
Следовательно, $(A_1 A_2; F_1 F_2) = -1$.
Теорема доказана.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве.–В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8, Калининград, 1977, с.32-38.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

М.В.К р е т о в

О СВЯЗНОСТЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОМПЛЕКСОМ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается комплекс (n-параметрическое семейство) K_n центральных невырожденных гиперквадрик Q. Выделяется комплекс W_n центрированных диаметральных гиперплоскостей P. Показано, что с комплексом K_n ассоциируется главное расслоение $G_{n^2-n+1}(K_n)$, базой которого является многообразие K_n, а типовым слоем – (n^2-n+1)-членная подгруппа стационарности центрированной гиперплоскости P. Доказано, что комплекс K_n индуцирует поле $\mathcal{N}_n$ одномерных направлений, не параллельных гиперплоскости P_n, которые позволяют задать связность в расслоении $G_{n^2-n+1}(K_n)$.

§1. Комплекс центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве

Отнесем комплекс K_n центральных невырожденных гиперквадрик Q к реперу $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = \overline{1,n})$, где A –центр гиперквадрики.

Деривационные формулы репера имеют вид

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha , \qquad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta ,$$

причем формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства $\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha$, $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$.

Уравнение квадрики Q имеет вид

$$F \equiv a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta - 1 = 0,$$

где $\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0$, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$.

Обозначим

$$\nabla R^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = d R^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} - R^{j_1 j_2 \dots j_q}_{k i_2 \dots i_p} \omega^k_{i_1} - R^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 k \dots i_p} \omega^k_{i_2} - \dots - R^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} k} \omega^k_{i_p} + R^{k j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \omega^{j_1}_k + \dots + R^{j_1 j_2 \dots j_{q-1} k}_{i_1 i_2 \dots i_p} \omega^{j_q}_k,$$

где индексы принимают некоторые значения.

Структурными формами гиперквадрики Q являются формы Пфаффа: ω^α, $\nabla a_{\alpha\beta}$.

Принимая формы ω^α за независимые первичные, запишем систему уравнений Пфаффа комплекса K_n в виде:

$$\nabla a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma}\, \omega^\gamma \tag{1.1}$$

Замыкая эту систему, получаем

$$\nabla a_{\alpha\beta\gamma} \wedge \omega^\gamma = 0 \tag{1.2}$$

В работе [1] доказано, что фундаментальный объект $\{a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta\gamma}\}$ является основным объектом [2] комплекса K_n. Замкнутая система (1.1),(1.2) определяет многообразие K_n с произволом C^2_{n+1} функций n аргументов.

Обозначим буквами $a^{\alpha\beta}$ приведенные миноры матрицы $(a_{\alpha\beta})$. Пусть объект $\{b_\alpha\}$ определяется соотношениями $b_\alpha = a^{\beta\gamma} a_{\beta\gamma\alpha}$. Известно [1], что линейный однородный объект $\{b_\alpha\}$ задает инвариантную диаметральную гиперплоскость P, уравнение которой имеет вид: $b_\alpha x^\alpha = 0$.

§ 2. Ассоциированное расслоение

Диаметральные гиперплоскости P описывают комплекс W_n. Проведем специализацию подвижного репера следующим образом: помещаем $\bar e_1, \bar e_2, \dots, \bar e_{n-1}$ на гиперплоскости P. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения $i, j, k, \ell, m = \overline{1, n-1}$. Тогда система уравнений Пфаффа комплекса W_n имеет вид:

$$\omega^n_i = \Lambda_{ij}\, \omega^j + \Lambda_i\, \omega^n. \tag{2.1}$$

Продолжая систему уравнений (2.1), получим:

$$\Delta\Lambda_{ij} \wedge \omega^j + \Delta\Lambda_i \wedge \omega^n = 0,$$

где $\Delta\Lambda_{ij} = \nabla\Lambda_{ij} + \Lambda_{ij}\, \omega^n_n$, $\Delta\Lambda_i = \nabla\Lambda_i - \Lambda_{ij}\, \omega^j_n$.

Тензор $\Lambda = (\Lambda_{ij}, \Lambda_i)$ является фундаментальным объектом первого порядка многообразия W_n, относительно рассмотренного репера нулевого порядка.

Формы $\omega^i, \omega^n, \omega^j_i, \omega^n_i, \omega^i_n, \omega^n_n$ являются инвариантными формами аффинной группы.

Базисные формы ω^i, ω^n и слоевые [3] удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^n \wedge \omega^i_n,$$

$$\mathcal{D}\omega^n = \omega^i \wedge \omega^n_i + \omega^n \wedge \omega^n_n,$$

$$\mathcal{D}\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k - \Lambda_{ik}\, \omega^j_n \wedge \omega^k - \Lambda_i\, \omega^j_n \wedge \omega^n,$$

$$\mathcal{D}\omega^i_n = \omega^j_n \wedge \omega^i_j + \omega^n_n \wedge \omega^i_n,$$

$$\mathcal{D}\omega^n_n = \omega^i_n \wedge \omega^n_i \quad (\text{по } n \text{ не суммировать!}).$$

Из этих уравнений следует, что с комплексом K_n ассоциируется главное расслоение $G_{n^2-n+1}(K_n)$, базой которого является комплекс K_n, а типовым слоем $-(n^2-n+1)$-членная подгруппа стационарности центрированной диаметральной гиперплоскости P.

§ 3. Связность в ассоциированном расслоении

В главном расслоении $G_{n^2-n+1}(K_n)$ зададим фундаментально-групповую связность [1] по Г.Ф.Лаптеву. Рассмотрим формы

$$\tilde\omega^j_i = \omega^j_i - \Gamma^j_{ik}\, \omega^k - \Gamma^j_i\, \omega^n,$$

$$\tilde\omega^i_n = \omega^i_n - L^i_j\, \omega^j - \Gamma^i\, \omega^n,$$

$$\tilde\omega^n_n = \omega^n_n - \Gamma_i\, \omega^i - \Gamma\, \omega^n,$$

где $\tilde\Gamma = (\Gamma^j_{ik}, \Gamma^j_i, L^i_j, \Gamma^i, \Gamma_i, \Gamma)$ – набор функций, удовлетворяющих уравнениям:

$$\Delta\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ik\ell}\,\omega^\ell + \tilde{\Gamma}^j_{ik}\,\omega^n,\quad \Delta\Gamma^j_i = \hat{\Gamma}^j_{ik}\,\omega^k + \tilde{\Gamma}^j_i\,\omega^n,$$

$$\Delta L^i_j = L^i_{jk}\,\omega^k + \tilde{L}^i_j\,\omega^n,\quad \Delta\Gamma^i = \hat{\Gamma}^i_k\,\omega^k + \hat{\Gamma}^i\,\omega^n,$$

$$\Delta\Gamma_i = \Gamma_{ij}\,\omega^j + \tilde{\Gamma}_i\,\omega^n,\quad \Delta\Gamma = \hat{\Gamma}_i\,\omega^i + \hat{\Gamma}\,\omega^n,$$

где

$$\Delta\Gamma^j_{ik} = \nabla\Gamma^j_{ik} + \Lambda_{ik}\,\omega^j_n,\quad \Delta\Gamma^j_i = \nabla\Gamma^j_i - \Gamma^j_i\,\omega^n - \Gamma^j_{ik}\,\omega^k_n + \Lambda_i\,\omega^j_n,$$

$$\Delta L^i_j = \nabla L^i_j - \Gamma^i_{kj}\,\omega^k_n - L^i_j\,\omega^n_n + \Gamma_j\,\omega^i_n,\ \Delta\Gamma^i = \nabla\Gamma^i - 2\Gamma^i\omega^n_n - L^i_j\,\omega^j_n -$$

$$-\Gamma^i_j\,\omega^j_n + \Gamma\omega^i_n,\ \Delta\Gamma_i = \nabla\Gamma_i - \Lambda_{ji}\,\omega^j_n,\ \Delta\Gamma = d\Gamma - \Gamma\omega^n_n - \Lambda_i\omega^i_n - \Gamma_i\,\omega^i_n.$$

Рассмотрим поле однородных направлений $\mathcal{N}_n$, не параллельных гиперплоскости P .

Т е о р е м а I. Поле $\mathcal{N}_n$ позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_{n^2-n+1}(K_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поле одномерных направлений $\mathcal{N}_n$ задается следующим уравнением

$$\bar{E} = \bar{e}_n + \lambda^i \bar{e}_i \quad . \tag{3.1}$$

В силу относительной инвариантности направления (3.I) имеем $\Delta\lambda^i = \lambda^i_j\,\omega^j + \lambda^i\,\omega^n$,

где $$\Delta\lambda^i = \nabla\lambda^i + \omega^i_n - \lambda^i\omega^n_n \,.$$

Фундаментальный объект первого порядка Λ и оснащающий квазитензор $\lambda = \{\lambda^i\}$ позволяют охватить [4] компоненты объекта связности $\hat{\Gamma}$ по формулам:

$$\Gamma^j_{ik} = \Lambda_{ik}\lambda^j,\ \Gamma^j_i = \Lambda_i\lambda^j,\ L^i_j = -\lambda^i\lambda^k\Lambda_{kj},\ \Gamma_j = -\lambda^k\Lambda_{kj},$$

$$\Gamma = -\lambda^i\Lambda_i\ ,\qquad \Gamma^i = -\lambda^i\lambda^k\Lambda_k\ .$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Комплекс K_n индуцирует поле $\mathcal{N}_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В общем случае $\det(\Lambda_{ij}) \neq 0$. Тогда существуют приведенные миноры Λ^{ij} . Утверждение теоремы следует из того, что объект Λ позволяет охватить квазитензор λ по формулам: $\lambda^i = -\Lambda_j\Lambda^{ij}$.

С л е д с т в и е. В ассоциированном расслоении $G_{n^2-n+1}(K_n)$ возникает внутренняя связность [5].

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. Индуцированно оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве.-Тр. геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 5, с.319-334.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск. матем.общ-ва, 1953, т.2, с.275-382.

3. М а л а х о в с к и й В.С., Остиану Н.М. Поля геометрических объектов в однородных и обобщенных пространствах.-Деп.ВИНИТИ АН СССР, М., 1979, № 3640 - 79ДРП.

4. Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.9. Калининград, 1978, с.I24-I33.

5. Л у м и с т е Ю.Г. Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей.-Матем.сб. 1973, т.9I, №2, с.2II-233.